

DOI: 10.16285/j.rsm.2021.2079

考虑粒组分类影响的最小孔隙比分布及模型验证

李识博^{1,2}, 代俊芳¹, 吴江伟³, 肖乐乐^{1,2}

(1. 西安科技大学 地质与环境学院, 陕西 西安 710054; 2. 西安科技大学 陕西省煤炭绿色开发地质保障重点实验室, 陕西 西安 710054;
3. 中钢集团马鞍山矿山研究总院股份有限公司 岩土工程研究所, 安徽 马鞍山 243000)

摘 要: 最小孔隙比是确定岩土体的密实程度与孔隙特征的有效物理指标, 如何快速有效地确定岩土体的最小孔隙比, 可为岩土体的固结与稳定提供可靠参数。多数估算粗细混合材料最小孔隙比的模型参数与粗细粒径比一一对应, 导致估算困难。在分析尾矿粒度组成、沉积规律和固结稳定的基础上, 以 8 种不同粗细粒径, 7~9 种不同细粒含量尾矿为试验对象, 拟合得到不同粒组尾矿最小孔隙比分布模型参数的函数关系; 基于混合尾矿颗粒的粒组特征, 给出了确定参数幂函数关系的指数值。分别采用模型参数要求粒组范围内的其他 6 组岩土材料和非粒组范围内的 3 组岩土材料进行验证。结果表明, 考虑粒组分类影响下的模型, 参数简单, 对不同材料的最小孔隙比估算准确率较高, 给出的最小孔隙比的分布规律合理, 可为岩土工程领域最小孔隙比估算提供可靠的计算方法。

关 键 词: 最小孔隙比; 粒组; 细粒含量; 粒径

中图分类号: TV139

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2022) 增刊 2-0193-12

Minimum void ratio distribution and model verification considering influence of grain size fraction

LI Shi-bo^{1,2}, DAI Jun-fang¹, WU Jiang-wei³, XIAO Le-le^{1,2}

(1. College of Geology and Environment, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an, Shaanxi 710054, China;
2. Shaanxi Provincial Key Laboratory of Geological Support for Coal Green Exploitation, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an, Shaanxi 710054, China; 3. Institute of Geotechnical Engineering, Sinosteel Maanshan General Institute of Mining Research Co., Ltd., Maanshan, Anhui 243000, China)

Abstract: Minimum void ratio is an effective physical index to determine the compactness and pore characteristics of soil mass. A fast and effective method to determine the minimum void ratio of soil mass can provide reliable parameters for soil consolidation and stability. Most of the model parameters corresponded to the ratio of fine-coarse particle size one by one, so it is difficult to estimate the minimum void ratio of fine-coarse mixed materials. By analyzing the grain size composition, deposition and consolidation stability of tailings, and combining with the minimum void ratio test results of tailings with 8 different grain sizes and 7-9 different fine grain contents, a power function of the minimum void ratio distribution model parameters of tailings with different grain size fractions was obtained. Based on the grain size fraction of mixed tailings, the exponent values to determine the power function relationship of parameters were given. Six groups of other soil materials grain size within the range of grain size fraction and three groups grain size without the range of grain size fraction were used to verify the model parameters. The results show that the model considering the influence of grain size fraction has simple parameters and high accuracy in estimating the minimum void ratio of different soil materials. The minimum void ratio given is reasonable, and it can provide a reliable calculation method for estimating the minimum void ratio in the field of geotechnical engineering.

Keywords: minimum void ratio; grain size fraction; fines content; grain size

1 引 言

最小孔隙比是一种广泛用于表征土体收缩特性

和最密实状态的指标之一^[1-2]。尤其在粗、细混合结构岩土体中, 细粒含量的变化对孔隙比的影响显著, 最终影响岩土体的压缩行为及强度^[3]、稳定状态

收稿日期: 2021-12-09

修回日期: 2022-03-29

基金项目: 国家自然科学基金青年基金 (No.41907255, No.41602359, No.41807190); 陕西省自然科学基金基础研究计划 (No.2017JQ4019); 青海省青藏高原北部地质过程与矿产资源重点实验室开放基金 (No.2019-KY-01)。

This work was supported by the Young Scholars of National Natural Science Foundation of China (41907255, 41602359, 41807190), the Natural Science Basic Research Plan in Shaanxi Province of China (2017JQ4019) and the Open Fund of Key Laboratory of the Northern Qinghai-Tibet Plateau Geological Processes and Mineral Resources (2019-KY-01).

第一作者简介: 李识博, 女, 1987 年生, 博士, 讲师, 硕士生导师, 主要从事矿山地质灾害方面的研究。E-mail: lishibo@xust.edu.cn

线^[4]、静态液化和不稳定行为等^[5-7]。Kuerbis^[8]早在 1989 年就发现孔隙比与细粒含量之间存在非线性关系,并影响了土的力学性能。Okuyama 等^[9]发现最小孔隙比受级配分布的显著影响,且随着颗粒尺寸的减小而增大。随后 Cubrinovski 等^[10]给出了细粒含量和等效粒径对砂土最小孔隙比的影响;并在不同沉积环境的砂土与其他细粒混合的孔隙比研究中得到了证实^[10-11]。而后, Zhou^[12]、Chu^[13]等学者给出了细粒含量对粉砂或砂黏土孔隙比的影响,进而影响其力学性能的结论。

根据《土工试验方法标准》(GB/T 50123—2019)^[14],最小孔隙比 $e_{\min}$ 的计算可通过土粒相对密度 G_s 和最大干密度 $\rho_{d\max}$ 计算得到,即 $e_{\min} = (G_s/\rho_{d\max}) - 1$ 。 $\rho_{d\max}$ 目前常采用击实和振动叉法进行测定;颗粒粒径小于 5 mm 时,相对密度常采用比重瓶法进行测定。然而,这些测试方法要求试验设备较多、操作不便捷、且对测试者的要求较高^[1, 15]。为此学者们尝试通过模型估算的方法给出孔隙比值。Chang 等^[16]以粉砂土为试验材料预测不同尺寸粉砂混合物孔隙比的变化规律并给出预测模型;Liu 等^[17]在此基础上将孔隙比的研究扩展到粒径较大的膨润土;之后,Chang 等^[18]又将其扩展到 3 种甚至多种尺寸混合条件下的最小孔隙比的估算。然而,学者们虽然给出了估算的模型,但模型参数要求较高,如不同等效粒径对应不同参数,且颗粒的形貌特征比粒径大小对最小孔隙比的影响更为明显^[16, 19]。而在对土颗粒形貌研究中发现,颗粒粒径跨度越大,颗粒形貌对其岩土工程特性的影响越显著^[20]。李珊珊等^[1]验证了砂土孔隙比测定方法的影响因素,鞠远江^[21]、沈扬^[22]等研究了钙质砂的渗透力学特性,巫尚蔚^[23]、彭啸鹏^[24]、乔兰^[25]等在研究尾矿的粒径分布、沉积规律及其工程特性时,都将研究颗粒粒径范围细化,来避免颗粒形态对其研究方向的影响。同时,又有部分学者在对颗粒形貌,岩土体固结、压缩、渗透等^[20-22, 26]与孔隙比相关的研究中发现,岩土颗粒大小以粒组来划分,得到相应的变化特征和力学参数具有很好的规律性。特别是在对尾矿这种特殊的岩土材料的研究中也发现,其粒度划分通常以粒组为划分标准。如, Sarsby^[27]在对大量的尾矿统计后,按粒度大小分为无砾石尾矿 ($d < 2$ mm) 和无黏土尾矿 ($d < 0.0039$ mm) 两大类,并给出了尾矿中砂粒组 ($d = 0.625 \sim 2$ mm) 较粉粒组 ($d = 0.0039 \sim 0.625$ mm) 更常见的结论。工程中还常根据细粒粒组的含量较多将尾矿定义为细粒尾矿,并开展一些列工程研究^[25, 28]。

综上所述,为了减小粒径引起颗粒形貌变化对孔隙比产生的影响,本文将研究材料粒径范围细化,根据试验数据拟合,得到细粗混合尾矿最小孔隙比分布模型参数的分布规律与颗粒所属粒组有关,进而确定考虑粒组分类影响下的最小孔隙比分布模型参数的分布函数。最后,采用模型对 9 种其他岩土材料最小孔隙比进行估算与对比,并讨论了模型参数的适用性和估算结果的规律性。上述研究成果可为岩土工程领域,特别是粒径分属不同粒组的混合岩土材料的最小孔隙比估算提供相关参考。

2 基于尾矿特性的最小孔隙比测定

2.1 试验材料与试验方案

尾矿为矿区常见的堆积的岩土体,多呈饱和欠固结状态,孔隙比大,密实程度低^[29-30]。特别是库内尾矿粗、细粒含量随沉积摊长度复杂的分布^[23, 31-32],使得尾矿的粒度分布跨度在 0~2 mm 之间。由于尾矿的粒度特征、沉积规律及固结稳定和排渗减压等都与尾矿颗粒的粒径大小有关,目前学者们对尾矿的研究已经将粒径细化到 2、1、0.83、0.5、0.3、0.25、0.15、0.125、0.1、0.075 mm 等粒径界限^[23-25]。

以陕西省镇安某钨矿尾矿为模型构建试验材料,综合以上尾矿研究中的粒径分类情况,并参考土粒组划分标准^[14],将试验尾矿颗粒分为两大类,粒径为小于 0.075 mm 的尾矿(粉粒组),和粒径为 0.075~0.1、0.1~0.15、0.15~0.25、0.25~0.3、0.3~0.5、0.5~1、1~2 mm 的尾矿(砂粒组),共 8 种粒径范围。考虑到细粒对孔隙比的影响,将 8 种粗、细粒径尾矿混合,共 22 种组合粒径;其中粉-砂粒组 7 种,每种按 9 个不同细粒百分含量配比,形成 63 组试验;细-粗砂粒组 15 种,每种按 7 个不同细粒百分含量配比,形成 105 组试验;共计 168 组不同细粒含量试验,具体试验方案如表 1 所示。

试验结果中粒径的计算均采用等效粒径代替,等效粒径的获取采用几何平均法,即

$$d_e = \sqrt{d_{\max} d_{\min}} \quad (1)$$

式中: d_e 为颗粒的等效粒径 (mm); $d_{\max}$ 、 $d_{\min}$ 为区间粒径的最大值和最小值 (mm)。

但粒径小于 0.075 mm 的材料不适合采用上述方法,现将小于 0.075 mm 的试验尾矿采用激光粒度仪进行实测,其结果如图 1 所示,其中粒径为 0.038 mm 对应的粒径含量较居中,因此粒径小于 0.075 mm 的材料等效粒径采用 $d_e = 0.5d_{\max}$ 计算。

表 1 试验方案
Table 1 Scheme of the experiments

细粒				粗粒			组合		形式
d/mm	d_e/mm	代表字母	$X_2/\%$	D/mm	D_e/mm	代表字母	编号	d_e/D_e	
0~0.075	0.038	A	0, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100	1~2	1.414	a	A-a	0.027	粉-砂
				0.5~1	0.707	b	A-b	0.054	
				0.3~0.5	0.387	c	A-c	0.098	
				0.25~0.3	0.274	d	A-d	0.139	
				0.15~0.25	0.194	e	A-e	0.196	
				0.1~0.15	0.122	f	A-f	0.311	
				0.075~0.1	0.087	d	A-g	0.437	
0.075~0.1	0.087	B	0, 20, 30, 40, 50, 70, 100	1~2	1.414	a	B-a	0.062	细-粗砂
				0.5~1	0.707	b	B-b	0.123	
				0.3~0.5	0.387	c	B-c	0.225	
0.1~0.15	0.122	C	0, 20, 30, 40, 50, 70, 100	0.25~0.3	0.274	d	B-d	0.318	细-粗砂
				1~2	1.414	a	C-a	0.086	
				0.5~1	0.707	b	C-b	0.173	
				0.3~0.5	0.387	c	C-c	0.315	
0.15~0.25	0.194	D	0, 20, 30, 40, 50, 70, 100	0.25~0.3	0.274	d	C-d	0.445	细-粗砂
				1~2	1.414	a	D-a	0.137	
				0.5~1	0.707	b	D-b	0.274	
				0.3~0.5	0.387	c	D-c	0.501	
0.25~0.3	0.274	E	0, 20, 30, 40, 50, 70, 100	0.25~0.3	0.274	d	D-d	0.708	细-粗砂
				1~2	1.414	a	E-a	0.194	
				0.5~1	0.707	b	E-b	0.388	
				0.3~0.5	0.387	c	E-c	0.708	

注： d 为细粒粒径； d_e 为细粒等效粒径； D 为粗粒粒径； D_e 为粗粒等效粒径； X_2 为细粒含量。

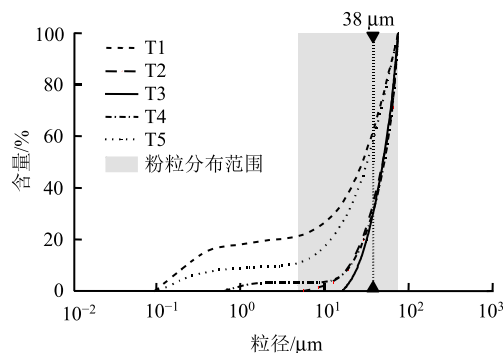


图 1 试验尾矿中小于 0.075 mm 粒度分布情况

Fig.1 The particle size distribution smaller than 0.075 mm of test tailings

2.2 试验结果及分析

根据《尾矿堆积坝岩土工程技术规范》(GB 50547—2010) [33] 和《土工试验方法标准》(GB/T 50123—2019) [14], 采用比重瓶法测定 G_s , 振动叉法测定 ρ_{dmax} , 根据 $e_{\text{min}} = (G_s/\rho_{\text{dmax}}) - 1$ 换算得到以上 168 组不同细粒含量尾矿最小孔隙比 e_{min} , 并绘制尾矿孔隙比随细粒含量变化关系, 如图 2 中黑色圆点所示。

不同粒径组合尾矿最小孔隙比随细粒含量的分布关系与 Chang 等 [16] 对砂-粉材料的研究结果相似。①最小孔隙比随细粒含量增加的变化情况: 随着细粒含量的增加, 最小孔隙比呈现先减小后增加

的倒三角形变化趋势 (见图 2); 且尾矿最小孔隙比的最低值对应的细粒含量的分布范围基本上在 20%~40%。②最小孔隙比随粒径大小的变化情况: 相同粗粒情况下, 孔隙比随平均粒径比 (d_e/D_e) 的增大而增大, 表现为粒径比越小, 倒三角形顶角角度越大 (图 2(a)~2(g), 或图 2(h)~2(k), 或图 2(l)~2(o), 或图 2(p)~2(s), 或图 2(t)~2(v)), 相同细粒情况下亦如此 (图 2(a)、2(h)、2(l)、2(p)、2(t), 或图 2(b)、2(i)、2(m)、2(q)、2(u), 或图 2(c)、2(j)、2(n)、2(r)、2(v)), 且这种现象在粗粒土中也同样被证实 [17]。③除此之外, 对比试验的 22 种单一粒径最小孔隙比之比与等效粒径比的关系 (见图 3), 发现最小孔隙比之比分布在 0.99~1.3 之间, 与砂-粉材料 0.8~1.4 的分布范围相近 [16]。

3 细粗混合尾矿最小孔隙比分布模型

3.1 细粗颗粒混合结构最小孔隙比分布模型

假设尾矿颗粒为理想的刚性球体, 其组成为尾矿颗粒和孔隙的两相结构, 这与实际尾矿的饱和堆积状态 [34] 情况一致; 简化堆积尾矿由粗、细两类颗粒组成, 其质量为 m , 体积为 V_Z , 包括体积为 V_G 的固体颗粒和体积为 V_V (或 V_{V1}) 的孔隙; 其中, 固体颗粒包括直径和体积分别为 D_1 和 V_{G1} 的粗粒, 和 D_2 和 V_{G2} 的细粒, $V_G = V_{G1} + V_{G2}$, 且二者所占固

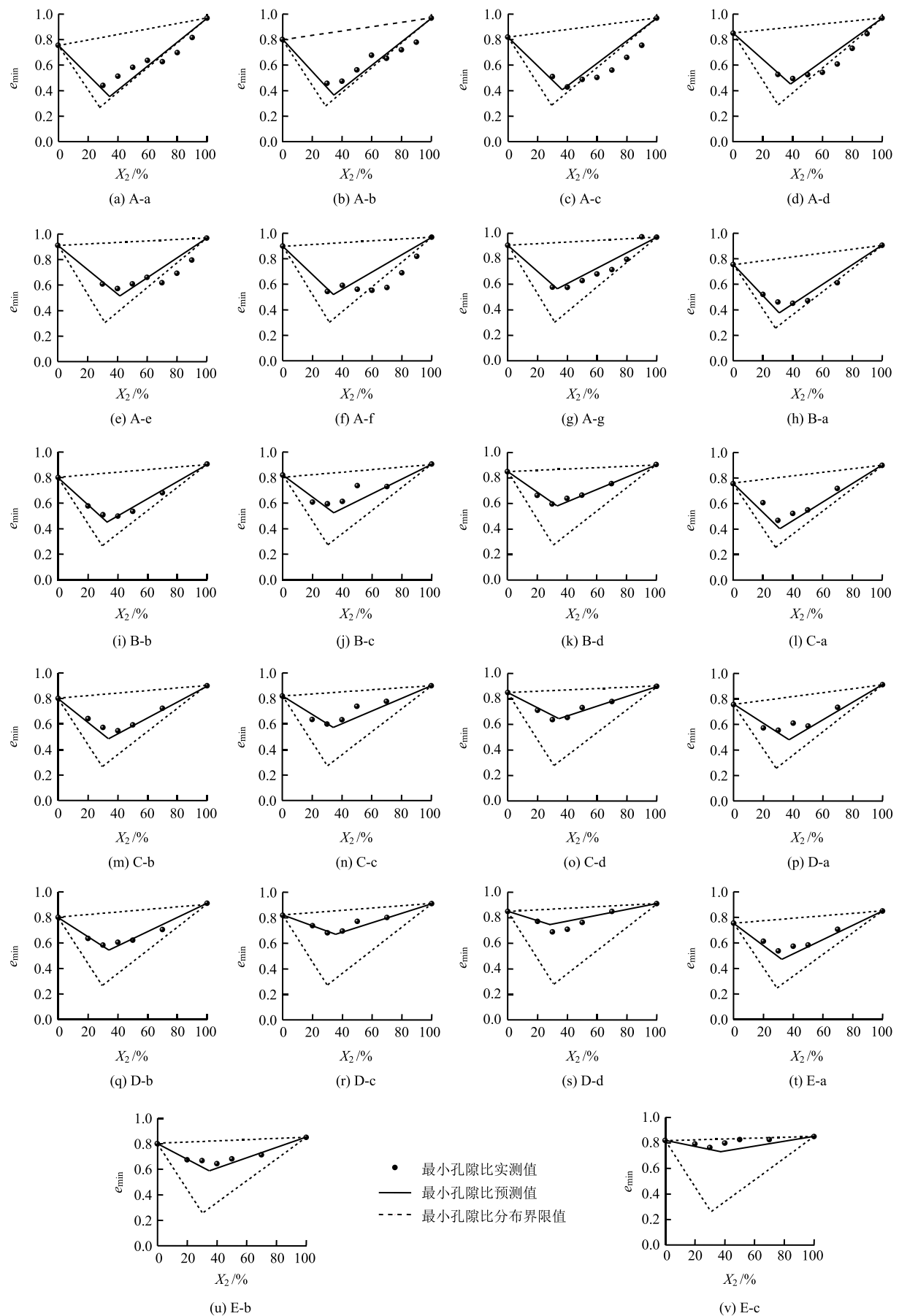


图 2 实测与预测的 22 种配比最小孔隙比 $e_{\min}$ 随细粒含量 X_2 的变化以及细粗混合尾矿最小孔隙比范围

Fig.2 Comparison of measured and predicted results of changes of minimum void ratio $e_{\min}$ with fines content X_2 for 22 kinds of particle size ratio in different fine particle contents

体体积百分含量分别为 X_1 和 X_2 ($X_1+X_2=100\%$)。若尾矿固体颗粒只有粗粒，组成尾矿的最小孔隙比为 e_1 ；若尾矿固体颗粒只有细粒，组成尾矿的最小孔隙比为 e_2 。根据粗、细组分所占比例不同，呈现粗粒骨架结构（见图 4）和细粒基质结构（见图 5）两种典型的结构特征，此时对应的最小孔隙比为 $e_{\min}$ 。

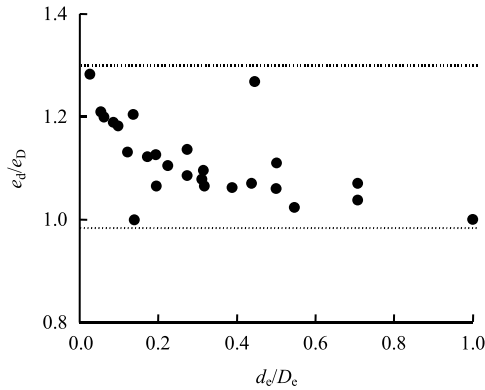


图 3 尾矿单一粒径最小孔隙比之比与等效粒径比的关系
Fig.3 Ratio of minimum void ratio versus particle size ratio for tailing grains with single grain size

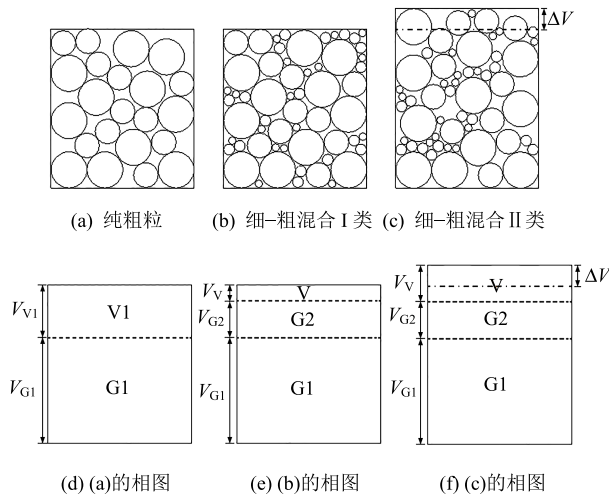


图 4 粗粒骨架孔隙结构示意图

Fig.4 Schematic diagram of the pore structure of the coarse-grained framework

而对于这两种结构特征，由于粗细混合情况不同，可形成两种不同的孔隙结构。第 1 种为粗粒骨架孔隙结构（见图 4），即粗粒为优势粒组，细粒充填、混合。根据细粒占比不同，可形成粗粒紧密结构（见图 4(a)、4(d)），最小孔隙比为 $e_1 = V_{V1}/V_{G1}$ ；细-粗混合 I 类结构（见图 4(b)、4(e)），细粒只充填粗粒形成的孔隙，而并不改变原有骨架结构，孔隙体积的变量为 $\Delta V_V = -V_{G2}$ ，最小孔隙比为 $e_1 = \frac{V_V}{V_{G1} + V_{G2}}$ ，且可形成粗粒骨架混合介质最小孔隙比的最小值；

细-粗混合 II 类结构（见图 4(c)、4(f)），细粒形成团簇，撑散骨架的链接关系，此时，撑散后的体积将会比前两种状态的体积增加 ΔV ，形成的孔隙比为

$$e_1 = \frac{V_V}{V_{G1} + V_{G2}} = \frac{V_{V1} + \Delta V_V}{V_{G1} + V_{G2}} \quad (2)$$

Chang 等^[35]通过试验发现，体积增加而引起的孔隙体积的变化量 ΔV_V 与添加的细粒体积成正比，即

$$\Delta V_V = -\alpha' V_{G2} \quad (3)$$

其中 α' 是一个与固体颗粒自身性质有关的常数，为了公式推导方便，令 $\alpha = \alpha' - 1$ ，则式 (2) 可以表示为 e_1 和 x_2 的函数：

$$e_{\min} = e_1(1 - x_2) - x_2 + \alpha x_2 \quad (4)$$

由此，得到粗粒骨架结构的 3 种不同最小孔隙比，如表 2 所示。

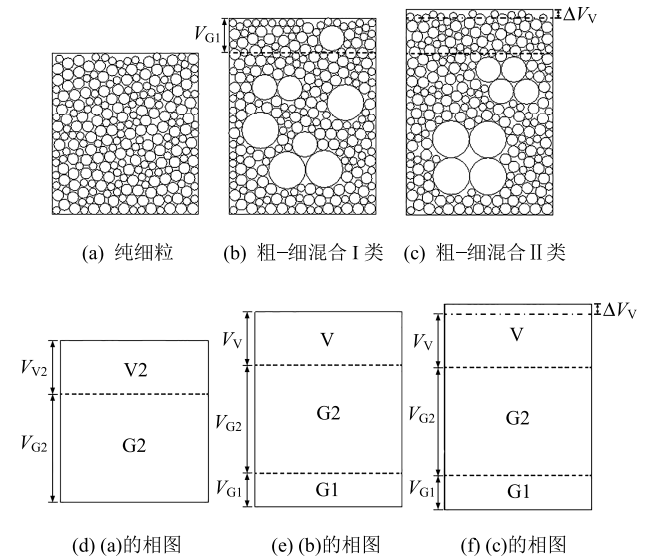


图 5 细粒基质孔隙结构示意图

Fig.5 Schematic diagram of the pore structure of the fine-grained matrix

第 2 种为细粒基质孔隙结构（见图 5），当细粒在混合物中起主导作用，粗粒嵌入、混合。根据粗粒含量的不同，形成细粒紧密结构（见图 5(a)、5(d)），最小孔隙比为 $e_2 = V_{V2}/V_{G2}$ ；粗-细混合 I 类结构（见图 5(b)、5(e)），粗粒以单个颗粒混合或嵌入到细粒形成的基质中，粗粒可能会占据一部分细粒体积，使总体积增加，孔隙体积为 V_V ($V_V = V_{V2}$)，两相组成的孔隙比达到细粒基质混合介质最小孔隙比的最小值；粗-细混合 II 类结构（见图 5(c)、5(f)），粗

粒由单颗粒倾向于多粒的链接和聚集,产生额外的孔隙 ΔV_V ($\Delta V_V \neq 0$), 细粒基质的孔隙体积也随之发生改变, 形成的孔隙比为

$$e_2 = \frac{V_V}{V_{G1} + V_{G2}} = \frac{V_{V2} + \Delta V_V}{V_{G1} + V_{G2}} \quad (5)$$

同样, 粗粒混入细粒介质引起的孔隙体积的变化量 ΔV_V 也与添加的粗粒体积成正比^[35], 即

$$\Delta V_V = \beta V_{G1} \quad (6)$$

其中, 系数 β 为常数 (与固体颗粒自身性质有关), 则式 (5) 可以表示为 e_2 和 x_2 的函数:

$$e_{\min} = e_2 x_2 + \beta(1 - x_2) \quad (7)$$

由此, 得到细粒基质结构的 3 种不同最小孔隙比, 如表 2 所示。

表 2 混合尾矿最小孔隙比分布情况

Table 2 Distribution of minimum void ratio of binary size tailings

结构类型	服从条件	混合结构	最小孔隙比
粗粒骨架	$x_2 = 0$	粗粒紧密结构	$e_{\min} = e_1$
混合尾矿	$\alpha = 0$	粗-细混合 I 类结构	$e_{\min} = e_1(1 - x_2) - x_2$
孔隙结构	$\alpha \neq 0$	粗-细混合 II 类结构	$e_{\min} = e_1(1 - x_2) - x_2 + \alpha x_2$
细粒基质	$x_2 = 1$	细粒紧密结构	$e_{\min} = e_2$
混合尾矿	$\beta = 0$	粗-细混合 I 类结构	$e_{\min} = e_2 x_2$
孔隙结构	$\beta \neq 0$	粗-细混合 II 类结构	$e_{\min} = e_2 x_2 + \beta(1 - x_2)$

绘制上述两种结构的最小孔隙比随细粒含量分布规律, 如图 6 所示。根据式 (4) 绘制出 MP 及延长线, 细粒含量为 100% 时, 最小孔隙比为 -1, 且一部分的最小孔隙比小于 0, 表明粗粒骨架孔隙结构中, 细粒所占据的体积远大于骨架形成的孔隙空间。根据式 (7) 绘制出 NP 及延长线, 为一条经过零点的直线, 即细粒含量为 0 时, 最小孔隙比也为 0。理论上, 当细粒混合量足够多时, 粗粒骨架孔隙结构与细粒基质孔隙结构可以相互转化, 即式 (4) 和式 (7) 都可建立细粒含量与最小孔隙比之间的关系, 即图 6 中 DM 和 ON 两条线对应的最小孔隙比都成立, 但任意一种混合颗粒只对应一个最小孔隙比。因此, 选择函数值中数值较大的作为真实的最小孔隙比值, 即线段 MP 和线段 NP ; 原因是形成大的孔隙比状态要比小的耗能低, 更容易实现。由线段 MP 和 NP 组成的细粒含量与最小孔隙比之间的关系函数可表示为

$$e_{\min} = e_1 x_1 + e_2 x_2 \quad (8)$$

$e_{\min}$ 随细粒含量的变化理论上应分布在三角形

MPN 范围内, 为细粗混合结构最小孔隙比范围, 而线段 MP 和线段 NP 的交点 P 对应的孔隙比 e_n 为细粗混合结构的最小孔隙比的阈值 (即最小孔隙比的最小值), 此点对应的细粒含量为界限细粒含量, 用 $X_{2-\lim}$ 表示。

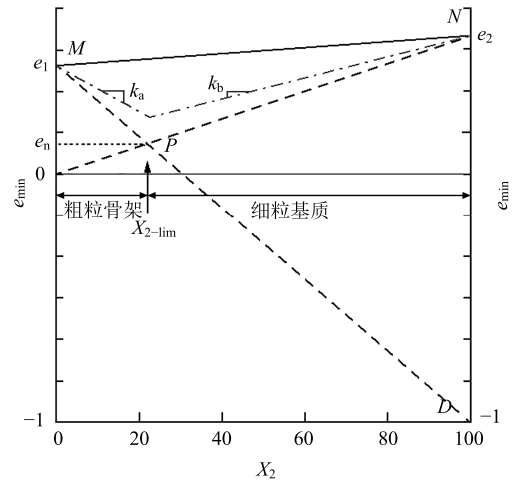


图 6 最小孔隙比随细粒含量分布规律

Fig. 6 Characteristics of minimum void ratio versus fines content for sand-silt mixture of tailings

$X_{2-\lim}$ 是粗粒骨架孔隙结构和细粒基质孔隙结构的界限含量, 当细粒含量小于 $X_{2-\lim}$ 时, 孔隙呈粗粒骨架孔隙结构特征; 当细粒含量大于 $X_{2-\lim}$ 时, 孔隙呈细粒基质孔隙结构特征。由式 (4) 和式 (7) 得

$$X_{2-\lim} = \frac{e_1 - \beta}{1 + e_1 + e_2 - \alpha - \beta} \quad (9)$$

界限细粒含量除了与单一粒径的最小孔隙比 e_1 、 e_2 有关外, 还随系数 α 和 β 的不同而发生变化。由图 6 可知, 线段 MN 和线段 MP 与 NP 分别是 $e_{\min}$ 分布的上、下界限; 其中, 线段 MP 的斜率 k_{MP} 为 $-(1+e_1)$, 线段 NP 的斜率 k_{NP} 为 e_2 , 线段 MN 的斜率 k_{MN} 为 $(e_2 - e_1)$ 。当 $e_{\min}$ 分布在下边界 (线段 MP 与 NP), $\alpha = \beta = 0$; 当 $e_{\min}$ 分布在上边界 (线段 MN), $\alpha = 1 + e_2$, $\beta = e_1$; 得到 α 和 β 的分布范围: $0 \leq \alpha \leq 1 + e_2$, $0 \leq \beta \leq e_1$ 。另外, k_{MP} 和 k_{NP} 为界限斜率, 实际最小孔隙比分布的斜率 (即 $e_{\min}/X_2$) 应为 k_a 和 k_b , 如图 6 所示; 理论上, 当细粗粒径相差越小时, k_a 和 k_b 越接近 MN , 而细粒直径越接近粗粒形成的孔径大小时, k_a 越接近 MP , k_b 越接近 NP 。

通过上述分析, 构建了以式 (4)、(7) 为最小孔隙比的计算公式, 通过式 (8) 圈定细粗混合结构最小孔隙比范围, 结合式 (8) 计算细粗混合物最小

孔隙比的最小值及对应的界限细粒含量，并给出了粒径差距与最小孔隙比连线形成斜率（ k_a 和 k_b ）的关系。同理，根据式（4）和式（7），已知 X_2 及 $e_{\min}$ ，推求粗、细单一粒径的最小孔隙比 e_1 和 e_2 ，得 $e_1 = \frac{e_{\min} + x_2}{(1 - x_2)}$ 和 $e_2 = \frac{e_{\min}}{x_2}$ 。此结果与 Mitchell^[36]和 Vaid^[37]提出的粗粒形成的骨架最小孔隙比以及 Thevanayagam^[38]提出的细粒形成的粒间孔隙比的结果一致。

在界限细粒含量的推算中发现， α 和 β 的取值与骨架或基质的最小孔隙比有关，数值变化范围较大。为了便于规范计算，设置范围限制在 0~1 之间的两个值 ε 和 ω 来代替 α 和 β ，令 $\varepsilon = 1 - \alpha / (1 + e_2)$ ， $\omega = 1 - \beta / e_1$ ，代入式（4）和式（7），得到粗细颗粒混合孔隙结构最小孔隙比分布模型：

$$e_{\min} = e_1(1 - x_2) + e_2x_2 - \varepsilon(1 + e_2)x_2 \quad (10)$$

$$e_{\min} = e_1(1 - x_2) + e_2x_2 - \omega e_1(1 - x_2) \quad (11)$$

式中： ε 为填充参数，当 $\varepsilon = 1$ 时，细粒仅充填到孔隙中，而并不改变粗粒形成的孔隙结构，如粗粒骨架孔隙结构中的细-粗混合 I 类结构，此时细粒直径 d 要比粗粒直径 D 小得多，此种状态的极限状态为 $d/D = 0$ ；当 $\varepsilon = 0$ ，即粗、细颗粒直径几乎相当，即 $d/D = 1$ ，细粒无法进入到粗粒形成的孔隙中，也就没有填充的情况了，如图 4(a)所示。 ω 为嵌入参数，当 $\omega = 1$ 时，粗粒以单个颗粒的形式嵌入细粒形成的基质中，不改变原有的孔隙结构，且粗、细粒径比例愈悬殊，其极限状态为 $d/D = 0$ ；当 $\omega = 0$ 时，即 $d/D = 1$ ，粗、细颗粒没有区别，无嵌入或填充状态可言，如图 5(a)所示。尽管将参数重新定义，但两式（式（10）、式（11））与式（4）和式（7）表达的意思完全相同。

对粗细颗粒混合结构最小孔隙比分布模型两边求导，得

$$\varepsilon = \frac{e_2 - e_1}{1 + e_2} - \frac{1}{1 + e_2} \left(\frac{de_{\min}}{dx_2} \right) \quad (12)$$

$$\omega = \frac{1}{e_1} \left(\frac{de_{\min}}{dx_2} \right) - \frac{e_2 - e_1}{e_1} \quad (13)$$

式中： $\frac{de_{\min}}{dx_2}$ 为图 6 中的 k_a 和 k_b ，当 $e_2 = e_1$ 时， ε 和 ω 与 $\frac{de_{\min}}{dx_2}$ 成正比。因此， ε 和 ω 物理意义与 $-k_a$ 和 k_b 相同，只是 ε 和 ω 的变化范围在 0~1 之间。

3.2 基于模型的试验结果分析

根据式（8），绘制细粗混合结构最小孔隙比范围。如图 2 中虚线圈定的倒三角形范围，各边斜率分别为 $-(1 + e_1)$ 、 e_2 和 $(e_2 - e_1)$ 。对比最小孔隙比范围与试验结果的分布发现，图 2(h)~2(v) 中细-粗砂粒组组合尾矿最小孔隙比成倒三角形分布，并在细粗混合结构最小孔隙比范围内；图 2(a)~2(g) 中粉-砂粒组组合尾矿最小孔隙比成倒三角形分布，但当细粒含量超过 60% 时，试验最小孔隙比值在圈定的倒三角形范围外；虽然 Chang 等^[16]对砂-粉材料的研究中并没有给出类似的结果和讨论，但其试验结果表现出的规律与上述尾矿的研究结果一致。同时，细粗混合尾矿最小孔隙比随细粒含量的变化，符合模型给出的粒径相差越大，最小孔隙比连线形成的斜率越接近圈定范围的下限（图 2(h)、2(l)、2(p)），粒径相差越小最小孔隙比连线形成的斜率越接近圈定范围的上限（图 2(a)、2(b)、2(c)、2(o)、2(r)、2(s)、2(v)）的规律特征。

根据式（9），得到不同细粒粒径尾矿配比的界限细粒含量 $X_{2-\lim}$ 及最小孔隙比的阈值 e_n ，如图 7 所示。 $X_{2-\lim}$ 分布范围与砂-粉材料^[16]及粗粒土^[17]试验结果的分布范围基本吻合。同一粒径尾矿混合不同细粒计算得到的最小孔隙比的阈值 e_n ，随细粒粒径的增加，呈降低趋势，这与 Chang 等^[16]对 Ottawa 砂粉混合物的研究结果是一致的；同比 5 组不同尾矿粗粒混合细粒后的 e_n ，粗粒粒径越大， e_n 越低；这也表现出粗细混合结构，粒径大小的差距对孔隙比的影响显著的特征。

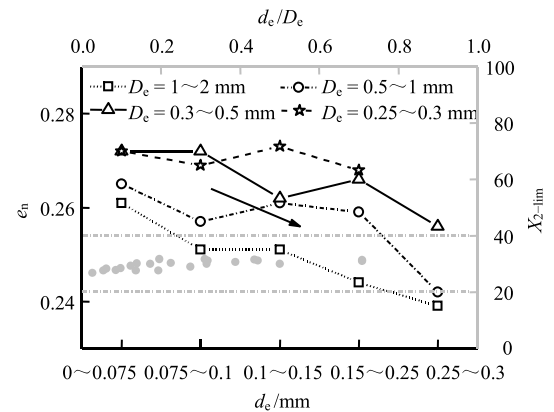


图 7 最小孔隙比的阈值 e_n 与对应界限细粒含量 $X_{2-\lim}$ 的分布情况

Fig.7 The distribution of e_n and $X_{2-\lim}$ for different fine and coarse tailing grains

根据模型设定，试验结果形成的倒三角形两短

边的斜率分别为 k_a 和 k_b ，由图 2 可知，细粗尾矿等效粒径比 (d_c/D_c) 越小， $-k_a$ 和 k_b 分布函数的坡度越陡峭，随着等效粒径比的增加，两个坡度值逐渐趋于平缓。绘制试验结果对应的 k_a 和 k_b 随细、粗颗粒等效粒径比的变化关系，如图 8 所示，分布符合幂函数特征， k_a 分布区间为 $-1.18 \sim -0.027$ ， k_b 分布区间为 $0 \sim 1$ ；分布区间小于 Chang 等^[16]给出的粉-砂材料分布范围（分布为幂函数， $k_a = -1.63 \sim 0.24$ ， $k_b = 0 \sim 1$ ），符合既定的分布情况，且分布规律都为细、粗粒径比越大，倒三角形开口张开度越小。

综上所述，不同细粒含量尾矿最小孔隙比的分布规律与所建模型较吻合，可采用上述模型进行尾矿最小孔隙比的估算和验证。

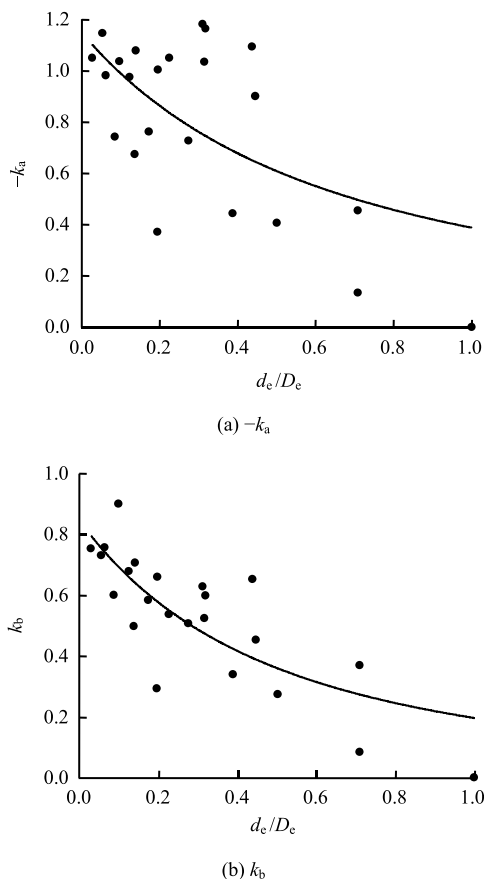


图 8 22 种配比情况实测最小孔隙比形成倒三角两短边的斜率

Fig.8 Measured slopes from 22 kinds of particle size ratio in different fine particle contents

3.3 基于尾矿特征的模型参数的确定

由 2.1 可知，若想确定细粗混合结构的最小孔隙比分布情况（式 (10)、(11)），只需确定 ε 和 ω 的值。由于 ε 和 ω 物理意义与 $-k_a$ 和 k_b 相同， ε 和 ω 与 $-k_a$ 和 k_b 随等效粒径比的分布规律应表现出一致性，即服从幂函数的分布关系。Chang^[16]、Liu^[17]、

Kim^[39]等先后从刚性球、砂性土、砾石土等不同材料对 ε 和 ω 进行幂函数拟合，发现不同的粗细粒径比及不同的颗粒形状对应不同的幂函数的指数值。

基于试验结果中不同粒组混合尾矿最小孔隙比的分布，根据式 (12)、(13)，绘制试验尾矿 ε 和 ω 随等效粒径比的分布，如图 9 所示，试验结果符合如下幂函数分布：

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{D_c}{d_c} \right)^q \quad (14)$$

$$\omega = 1 - \left(\frac{D_c}{d_c} \right)^s \quad (15)$$

式中： q 为函数 ε 的指数，为充填指数； s 为函数 ω 的指数，为嵌入指数。

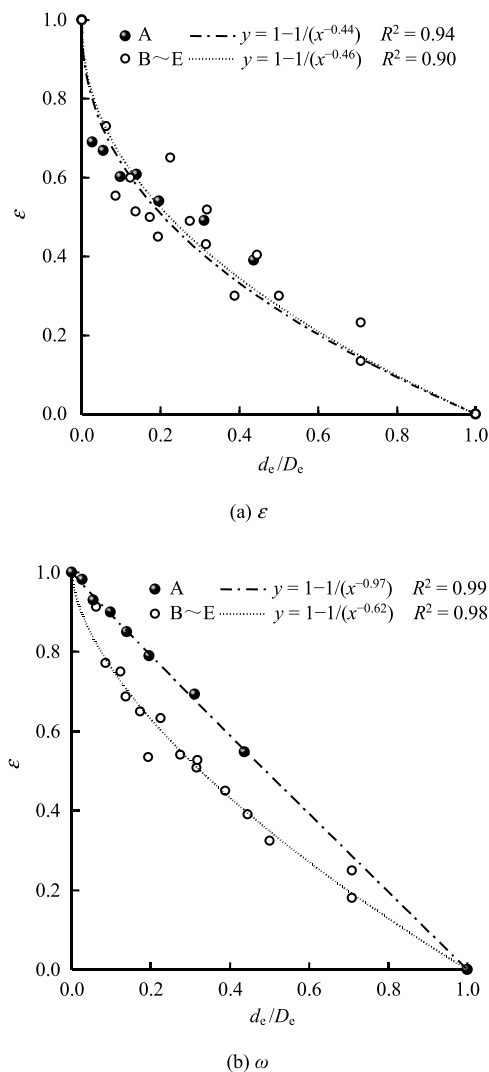


图 9 22 种配比情况填充参数 ε 和嵌入参数 ω 随等效粒径比 d_c/D_c 的变化及拟合结果

Fig.9 Variation and fitting results of coefficients ε and ω for 22 kinds of particle size ratio with particle size ratio d_c/D_c

根据拟合的试验结果发现, 充填指数在粉-砂粒组组合中 $q = -0.44$ (可决系数为 0.94), 粗-细砂粒组组合中 $q = -0.46$ (可决系数为 0.90), 差异不大; 但嵌入指数在粉-砂粒组组合中 $s = -0.97$ (可决系数为 0.99), 粗-细砂粒组组合中 $s = -0.62$ (可决系数为 0.98), 差异较大。可见, 无论是在 3.2 节中细粗混合结构最小孔隙比范围的确定, 还是在最小孔隙比随细粒含量的分布关系 (体现在充填参数 ε 和嵌入参数 ω 随粒径比 d_e/D_e 的分布), 细、粗颗粒是否归属于统一粒组 (砂粒组、粉粒组) 对细粗混合物的最小孔隙比影响显著。

综上所述, 得到了不同粒组混合尾矿最小孔隙比分布模型:

$$\left. \begin{aligned} e_{\min} &= e_1(1-x_2) + e_2x_2 - \varepsilon(1+e_2)x_2 \\ e_{\min} &= e_1(1-x_2) + e_2x_2 - \omega e_1(1-x_2) \\ \varepsilon &= 1 - \left(\frac{D_e}{d_e}\right)^q \\ \omega &= 1 - \left(\frac{D_e}{d_e}\right)^s \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

当 D_e 和 d_e 都为砂粒组 ($0.25 \text{ mm} < D_e < 2 \text{ mm}$ 且 $0.075 \text{ mm} < d_e < 0.25 \text{ mm}$) 时, $q = -0.46$, $s = -0.62$ 。

当 D_e 为砂粒组, d_e 为粉粒组 ($0.075 \text{ mm} < D_e < 2 \text{ mm}$ 且 $0.03 \text{ mm} < d_e < 0.075 \text{ mm}$) 时, $q = -0.44$, $s = -0.97$ 。

4 粉砂粒组混合材料最小孔隙比的估算及分布规律特征

4.1 尾矿粉砂粒组最小孔隙比估算

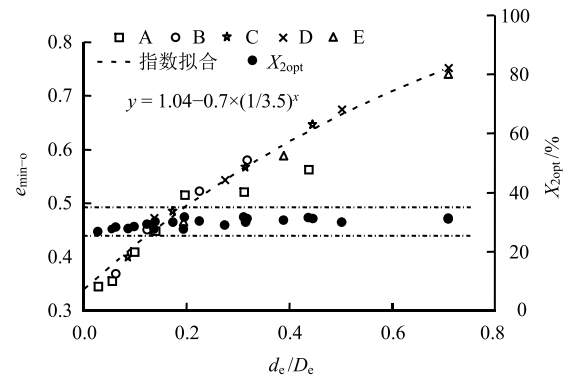
利用 ε 和 ω 两个指数估算尾矿最小孔隙比随细粒含量的变化, 如图 2 中实线所示, 与实测孔隙比 (实心圆点) 之间的平均差异不超过 10%, 在 Chang^[16]和 Liu^[17]等对最小孔隙比的估值误差的范围内。

利用以上验证的试验模型, 估算 22 组试验最小孔隙比的最小值 $e_{\min-o}$ 及对应的细粒含量 X_{2opt} , 如图 10(a)所示; 细粒含量 X_{2opt} 分布在 20%~42.0%之间, 略高于 Chang 等^[16]对粉-砂材料的估算值; 而基于模型估算得到的 $e_{\min-o}$ 随 D_e/d_e 递增与 2.2 节试验结果及分析一致; 同时, $e_{\min-o}$ 与 D_e/d_e 之间存在着很好的指数函数关系; 这与 Li 等^[40]对尾矿采用基于粒径大小和颗粒形态的最小孔隙比分析模型得到的 $e_{\min-o}$ 随 D_e/d_e 的分布规律是一致的。

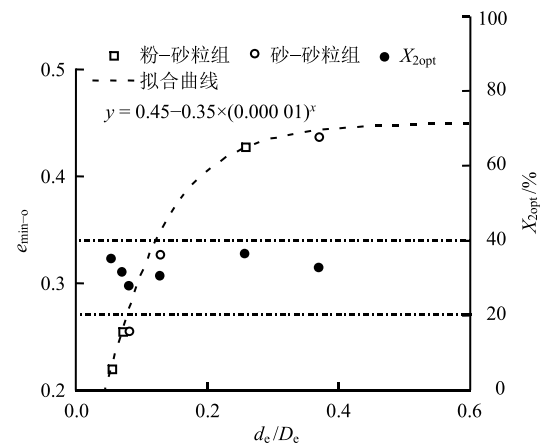
4.2 其他岩土材料粉砂粒组最小孔隙比估算

考虑到所建不同粒组混合尾矿最小孔隙比分布

模型的适用性, 补充与所建模型相同粒级范围的其他岩土材料 6 组, 非粒级范围材料 3 组, 共计 9 组最小孔隙比试验结果, 如图 11 所示。虽然 6 组粒级范围内的验证材料都为砂性土, 但细、粗粒径大小, 粒径比及颗粒形貌均不同, 且估算与实测结果误差均不超过 10%, 在合理范围内; 同时, 6 组材料估算的 $e_{\min-o}$ 及 X_{2opt} 随 D_e/d_e 的分布 (见图 10(b)), 与尾矿结果的分布规律均服从 $y = a-bc^x$ 的指数关系。



(a) 尾矿



(b) 其他岩土材料

图 10 最小孔隙比的最小值与等效粒径比的关系
Fig.10 Minimum value of ratio of minimum void ratio versus particle size ratio

而 3 组非模型分布范围的粒径组合, 估算与实测结果的误差分别为图 11(g)中的 53% (细为粉、粗为砂的估算模型)、图 11(h)中的 14% (细粗都为砂粒组估算模型)、及图 11(i)中的 14.6% (细粗都为砂粒组估算模型) 和 11.2% (细为粉、粗为砂的估算模型); 3 组估算结果均超过 Chang 等^[16]对粉砂 (误差 < 4%) 和对大颗粒 GMZ 膨润土 (误差 < 10%) 的估算结果, 可见对于超出粒组范围内的粒径分布规律适用性不强, 估算结果偏差较大。

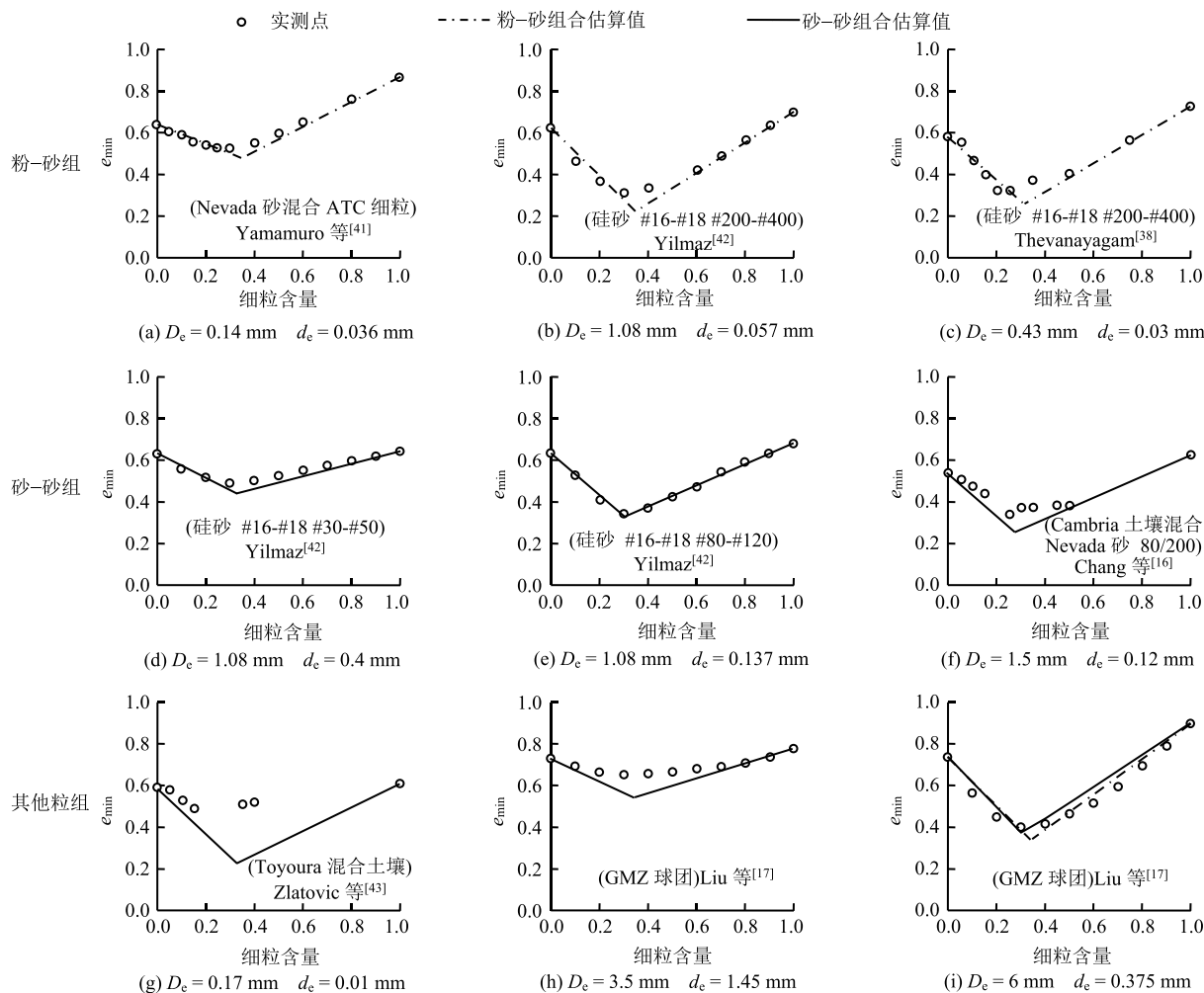


图 11 9 种不同岩土材料最小孔隙比随细粒含量的变化及估值

Fig.11 Variation and estimation of minimum void ratio with fine particle content of 9 different soil materials

5 结 论

(1) 以细、粗颗粒混合结构最小孔隙比分布模型为基础, 根据 168 组尾矿试验结果, 提出了反映不同粒组尾矿最小孔隙比分布模型及参数的表达式, 模型参数随粒径比的变化具有明显的幂函数分布规律性和合理性。

(2) 不同粒组尾矿最小孔隙比分布模型估算结果与尾矿试验结果和粒级范围内的其他材料试验结果误差合理, 但与非粒径范围内的试验结果之间的误差较大, 即模型可为粒组范围内的细粗混合颗粒提供可靠的最小孔隙比估算。

(3) 基于不同粒组混合尾矿最小孔隙比分布模型, 估算得到不同细粗混合颗粒最小孔隙比的最小值 $e_{\min-o}$ 及对应的细粒含量 X_{2opt} , 并建立得到了 $e_{\min-o}$ 与粗细颗粒比 D_c/d_c 成较好的指数函数关系, 可为细粗混合颗粒的最小孔隙比最小值的确定及对应细粒含量的确定提供参考。

参 考 文 献

- [1] 李珊珊, 李大勇, 高玉峰. 砂土最大最小孔隙比测定及其影响因素分析[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(3): 554-561.
LI Shan-shan, LI Da-yong, GAO Yu-feng. Determination of maximum and minimum void ratios of sands and their influence factors[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2018, 40(3): 554-561.
- [2] KIM JONGKWAN, KAWAI TADASHI, KAZAMA MOTOKI. Minimum void ratio characteristic of soils containing non-plastic fines[J]. **Soils and Foundations**, 2019, 59(6): 1772-1786.
- [3] 陈永健, 赵艳林, 文松松, 等. 黏粒含量对砂土强度和压缩特性的影响[J]. 科学技术与工程, 2017, 17(23): 281-286.
CHEN Yong-jian, ZHAO Yan-lin, WEN Song-song, et al. Effect of clay content on the strength and compressibility of

- sandy soil[J]. **Science Technology and Engineering**, 2017, 17(23): 281-286.
- [4] FOURIE A B, PAPAGEORGIOU G. Defining an appropriate steady state line for Merriespruit gold tailings[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2001, 38(4): 695-706.
- [5] THEVANAYAGAM S, SHENTHAN T, MOHAN S, et al. Undrained fragility of clean sands, silty sands, and sandy silts[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2002, 128(10): 849-859.
- [6] 尹光志, 王文松, 魏作安, 等. 地震作用下高堆尾矿坝永久变形与稳定性分析[J]. **岩土力学**, 2018, 39(10): 3717-3726.
- YIN Guang-zhi, WANG Wen-song, WEI Zuo-an, et al. Analysis of the permanent deformation and stability of high tailings dam under earthquake action[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, 39(10): 3717-3726.
- [7] 杨春和, 张超, 李全明, 等. 大型高尾矿坝灾变机制与防控方法[J]. **岩土力学**, 2021, 42(1): 1-17.
- YANG Chun-he, ZHANG Chao, LI Quan-ming, et al. Disaster mechanism and prevention methods of large-scale high tailings dam[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2021, 42(1): 1-17.
- [8] KUEBIS R H. The effect of gradation and fines content in the undrained loading response of sand[D]. Vancouver, Canada: University of British Columbia, 1989.
- [9] OKUYAMA K, FUJIWARA M, OCHI H, et al. Expansion of maximum particle size limitation value in test for maximum and minimum densities of sands[J]. **Proceedings of JSCE**, 1999, 638(III-49): 11-27.
- [10] CUBRINOVSKI M, ISHIHARA K. Maximum and minimum void ratio characteristics of sands[J]. **Soils and Foundations**, 2002, 42(6): 65-78.
- [11] CHO G C, DODDS J, SANTAMARINA J C. Particle shape effects on packing density, stiffness, and strength: natural and crushed sands[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2006, 133(11): 591-602.
- [12] ZHOU Shan-shan, YANG Lei, LÜ Xin, et al. Fine sand migration in hydrate-bearing sediments and median grain size ratio optimization of gravel pack[J]. **Journal of Natural Gas Science and Engineering**, 2021, 88: 103809.
- [13] CHU Min-chien, GE Louis. Stiffness degradation of coarse and fine sand mixtures due to cyclic loading[J]. **Engineering Geology**, 2021, 288: 106155.
- [14] 中华人民共和国水利部. GB/T 50123—2019 土工试验方法标准[S]. 北京: 中国计划出版社, 2019.
- Ministry of Water Resources of the People's Republic of China. GB/T 50123—2019 Standard for geotechnical testing method[S]. Beijing: China Planning Press, 2019.
- [15] 范孟华, 邹正伟. 改进砂的相对密度试验方法的建议[J]. **路基工程**, 2007(5): 67-68.
- FAN Meng-hua, ZOU Zheng-wei. Suggestions on improving testing method for relative density of sand[J]. **Subgrade Engineering**, 2007(5): 67-68.
- [16] CHANG C S, WANG J Y, GE L. Modeling of minimum void ratio for sand-silt mixtures[J]. **Engineering Geology**, 2015, 196: 293-304.
- [17] LIU Z R, YE W M, ZHANG Z, et al. A nonlinear particle packing model for multi-sized granular soils[J]. **Construction and Building Materials**, 2019, 221: 274-282.
- [18] CHANG C S, DENG Y B. A nonlinear packing model for multi-sized particle mixtures[J]. **Powder Technology**, 2018, 336: 449-464.
- [19] MIURA K, MAEDA K, FURUKAWA M, et al. Physical characteristics of sands with different primary properties[J]. **Soils and Foundations**, 1997, 37(3): 53-64.
- [20] 马成昊, 朱长歧, 刘海峰, 等. 土的颗粒形貌研究现状及展望[J]. **岩土力学**, 2021, 42(8): 2041-2058.
- MA Cheng-hao, ZHU Chang-qi, LIU Hai-feng, et al. State-of-the-art review of research on the particle shape of soil[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2021, 42(8): 2041-2058.
- [21] 鞠远江, 胡明鉴, 秦坤坤, 等. 珊瑚礁岛钙质砂细颗粒渗透运移规律研究[J]. **岩土力学**, 2021, 42(5): 1245-1252, 1265.
- JU Yuan-jiang, HU Ming-jian, QIN Kun-kun, et al. Experimental study of filtration & fine particles migration of calcareous sand in coral reef island[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2021, 42(5): 1245-1252, 1265.
- [22] 沈扬, 沈雪, 俞演名, 等. 粒组含量对钙质砂压缩变形特性影响的宏细观研究[J]. **岩土力学**, 2019, 40(10): 3733-3740.
- SHEN Yang, SHEN Xue, YU Yan-ming, et al. Macro-micro study of compressive deformation properties of calcareous sand with different particle fraction contents[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2019, 40(10): 3733-3740.
- [23] 巫尚蔚, 杨春和, 张超, 等. 基于 Weibull 模型的细粒尾矿粒径分布[J]. **重庆大学学报**, 2016, 39(3): 1-12.
- WU Shang-wei, YANG Chun-he, ZHANG Chao, et al. Particle size distribution of fine-grained tailings based on Weibull distribution[J]. **Journal of Chongqing University**, 2016, 39(3): 1-12.

- [24] 彭啸鹏, 杨小聪, 郭利杰. 充填尾砂颗粒干扰沉降过程实验研究[J]. 煤炭学报, 2019, 44(5): 1521-1526.
PENG Xiao-peng, YANG Xiao-cong, GUO Li-jie. Experimental study on the hindered settling process of backfill tailings[J]. **Journal of China Coal Society**, 2019, 44(5): 1521-1526.
- [25] 乔兰, 屈春来, 崔明. 细粒含量对尾矿工程性质影响分析[J]. 岩土力学, 2015, 36(4): 923-927, 945.
QIAO Lan, QU Chun-lai, CUI Ming. Effect of fines content on engineering characteristics of tailings[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(4): 923-927, 945.
- [26] 张云毅, 吴玉鹏, 张可能, 等. 粗粒组对细粒类填土力学性质的影响分析[J]. 土工基础, 2019, 33(1): 39-43.
ZHANG Yun-yi, WU Yu-peng, ZHANG Ke-neng, et al. Effect of coarse aggregate group on mechanical properties of the fine-grained soil mixtures[J]. **Soil Engineering and Foundation**, 2019, 33(1): 39-43.
- [27] SARSBY R W. Environmental geotechnics[M]. 2nd ed. London: Thomas Telford, 2013.
- [28] 余新洲. 一种三维立体排渗方式在细粒级尾砂筑坝中的应用[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(增刊 1): 74-78.
YU Xin-zhou. Application of 3D solid water seepage method in construction of fine fraction tailings dam[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2016, 38(Suppl.1): 74-78.
- [29] 颜学军. 上游法尾矿堆筑坝坝体沉积规律探讨[J]. 稀有金属与硬质合金, 2008, 36(2): 54-58.
YAN Xue-jun. Investigation on the depositing law of tailings dam by upstream damming[J]. **Rare Metals and Cemented Carbides**, 2008, 36(2): 54-58.
- [30] 张雪东, 蔡红, 魏迎奇, 等. 基于动力离心试验的软基尾矿库地震响应研究[J]. 岩土力学, 2020, 41(4): 1287-1294, 1304.
ZHANG Xue-dong, CAI Hong, WEI Ying-qi, et al. Characterization of the seismic behavior of tailings reservoir founded on soft soil using dynamic centrifuge tests[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2020, 41(4): 1287-1294, 1304.
- [31] 张千贵, 王雅梦, 李广治, 等. 尾矿坝变形细观力学机理的颗粒流数值模拟[J]. 重庆大学学报, 2015, 38(3): 71-79.
ZHANG Qian-gui, WANG Ya-meng, LI Guang-zhi, et al. Simulation of the mesomechanics mechanism of the tailing dam's deformation with particle flow code[J]. **Journal of Chongqing University**, 2015, 38(3): 71-79.
- [32] 张超, 马昌坤, 杨春和, 等. 粒径对尾矿抗剪强度及坝体稳定性影响[J]. 岩土工程学报, 2019, 41(增刊 1): 145-148.
ZHANG Chao, MA Chang-kun, YANG Chun-he, et al. Effects of particle diameter on shear strength of tailings and stability of tailings dams[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2019, 41(Suppl.1): 145-148.
- [33] 中华人民共和国住房和城乡建设部. GB 50547—2010 尾矿堆积坝岩土工程技术规范[S]. 北京: 中国计划出版社, 2019.
Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. GB 50547—2010 Technical code for geotechnical engineering of tailings embankment[S]. Beijing: China Planning Press, 2010.
- [34] 涂新斌, 王思敬. 图像分析的颗粒形状参数描述[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(5): 659-662.
TU Xin-bin, WANG Si-jing. Particle shape descriptor in digital image analysis[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2004, 26(5): 659-662.
- [35] CHANG C S, MEIDANI M. Dominant grains network and behavior of sand-silt mixtures: stress-strain modeling[J]. **International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics**, 2013, 37(15): 2563-2589.
- [36] MITCHELL J K. Fundamentals of soil behavior[M]. 2nd ed. [S. l.]: Wiley Interscience Publ, 1993.
- [37] VAID Y P. Liquefaction of silty soils[J]. **Proceedings of Ground Failures Under Seismic Conditions Geotechnical Special Publication**, 1994(44): 1-16.
- [38] THEVANAYAGAM S. Intergrain contact density indices for granular mixes-I: framework[J]. **Earthquake Engineering & Engineering Vibration**, 2007, 6(2): 123-134.
- [39] KIM M, SEO H. Evaluation of one- and two-parameter models for estimation of void ratio of binary sand mixtures deposited by dry pluviation[J]. **Granular Matter**, 2019, 21(3): 71.
- [40] LI Shi-bo, LIANG Hao, LI Hao, et al. Minimum void ratio model established from tailings and determination of optimal void ratio[J]. **Geofluids**, 2021, 2021: 8619121.
- [41] YAMAMURO J A, COVERT K M. Monotonic and cyclic liquefaction of very loose sands with high silt content[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2001, 127: 314-324.
- [42] YILMAZ Y. A study on the limit void ratio characteristics of medium to fine mixed graded sands[J]. **Engineering Geology**, 2009, 104(3-4): 290-294.
- [43] ZLATOVLC S, ISHIHARA K. Normalized behavior of very loose non-plastic soils: effects of fabric[J]. **Soils and Foundation**, 1997, 37(4): 47-56.